# EUCLIDES

*MAANDBLAD*
*VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE*

*ORGAAN VAN*
*DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL*
*EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.*

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

39e JAARGANG 1963/1964

V — 1 FEBRUARI 1964

INHOUD



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.



De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. Het abonnementsgeld is begrepen in de contributie. Deze bedraagt *f* 8,00 per jaar, aan het begin van elk verenigingsjaar te betalen door overschrijving op postrekening 143917, ten name van Wimecos te Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 september.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W V.O.* Zij dienen *f* 5,00 te storten op postrekening 614418 t.n.v. penningmeester Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

*Boeken ter bespreking* en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

*Artikelen ter opname* aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

*Opgaven voor de „kalender"* in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

# VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. Bottema

Delft

## LV. *Zo maar wat in een driehoek.*

Van een gegeven driehoek $ABC$ zijn $AA'$, $BB'$ en $CC'$ de hoogtelijnen. Hierop zetten wij van de hoekpunten uit de stukken $AU$, $BV$ en $CW$ af, die alle gelijk zijn aan de gegeven lengte $p$; wij willen de driehoek $UVW$ beschouwen (fig. 1).

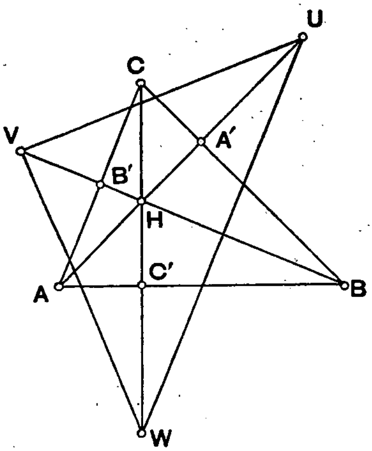



Fig. 1.

Voor $p = 0$ valt de nieuwe driehoek met de gegevene samen. Voor grote positieve waarden van $p$ en ook voor negatieve $p$ van grote absolute waarde leert de aanschouwing dat $UVW$ dezelfde oriëntatie heeft als $ABC$ (in onze figuur de tegenwijzerrichting). De vraag rijst of $p$ zo gekozen kan worden dat $UVW$ in de andere richting doorlopen wordt. Daarmee hangt blijkbaar uit overwegingen van continuïteit de vraag samen of de punten $U$, $V$ en $W$ op één rechte kunnen liggen.

Om het antwoord te vinden zullen wij het oppervlak $O'$ van $UVW$ bepalen, dat blijkbaar een functie van $p$ is. Voor onze beschouwing is essentieel dat met $O'$ het van de oriëntatie afhankelijk oppervlak bedoeld is, zodat $O'$ ook negatief kan zijn. Onze formules

trachten wij algemeen geldend te houden, ook voor stomphoekige driehoeken $ABC$, waar de dingen wat anders liggen. (fig. 2). Is $H$ het hoogtepunt van de driehoek, dan is $AH = 2R\cos\alpha$, $BH = 2R\cos\beta$, $CH = 2R\cos\gamma$, waarbij consequent op de hoogtelijnen de richtingen $AA'$ enz. positief worden gerekend.

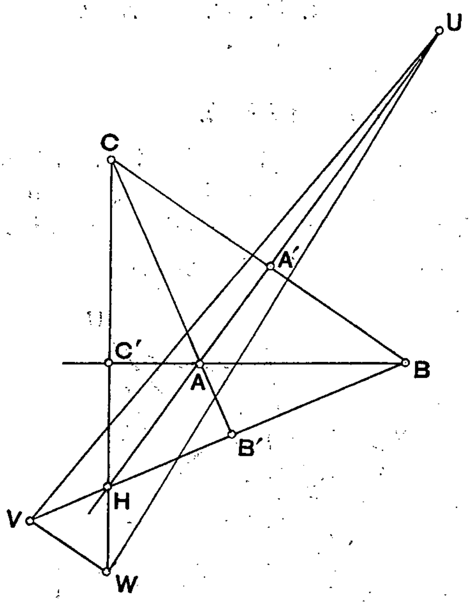



Fig. 2.

Voorts geldt voor elke ligging van $U$, $V$ en $W$:

$$UH = AH - p,\ VH = BH - p,\ WH = CH - p \qquad (1)$$

$$\sin VHW = \sin\alpha,\ \sin WHU = \sin\beta,\ \sin UHV = \sin\gamma \qquad (2)$$

terwijl tevens algemeen geldt voor de oppervlakken $O_1$, $O_2$ en $O_3$ van resp. de driehoeken $VWH$, $WUH$ en $UVH$:

$$O_1 = \tfrac{1}{2}VH \cdot WH \sin\alpha,\ O_2 = \tfrac{1}{2}WH \cdot UH \sin\beta, \qquad (3)$$
$$O_3 = \tfrac{1}{2}UH \cdot VH \sin\gamma$$

zodat men, daar

$$O' = O_1 + O_2 + O_3$$

voor elke situatie vindt:

$$O'(p) = \tfrac{1}{2}(2R\cos\beta - p)(2R\cos\gamma - p)\sin\alpha + \tfrac{1}{2}(2R\cos\gamma - p)(2R\cos\alpha - p)\sin\beta + \tfrac{1}{2}(2R\cos\alpha - p) \times (2R\cos\beta - p)\sin\gamma. \qquad (4)$$

De coëfficiënt van $p^2$ is $\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = \frac{s}{2R}$, die van $p$ is $-R(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) = -s$. De bekende term luidt $2R^2 \sum \sin\alpha \cos\beta \cos\gamma = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = O$, wat ook duidelijk is daar voor $p = 0$ de driehoek $UVW$ met $ABC$ samenvalt. Schrijven wij nog $O = sr$, dan is het resultaat:

$$O' = \frac{s}{2R}(p^2 - 2Rp + 2Rr) \tag{5}$$

Het oppervlak $O'$ van de driehoek $UVW$ is dus een kwadratische functie van $p$. De discriminant van de drieterm in het rechterlid is: $D^2 = R^2 - 2Rr$ wat volgens een bekende formule gelijk is aan $d^2 = MI^2$, waarin $M$ en $I$ de middelpunten zijn van de om- en de ingeschreven cirkel van driehoek $ABC$. Men heeft dus $D^2 \geqq 0$. Alleen in een gelijkzijdige driehoek is $D = 0$ waaruit volgt dat $O'$ in dat geval slechts gelijk aan nul is voor $p = R$, wat vanzelf spreekt. Wij hebben: *in een niet-gelijkzijdige driehoek zijn er steeds twee verschillende, reële positieve waarden van $p$, waarvoor $U$, $V$ en $W$ collineair zijn, nl.* $p = R \pm d$.

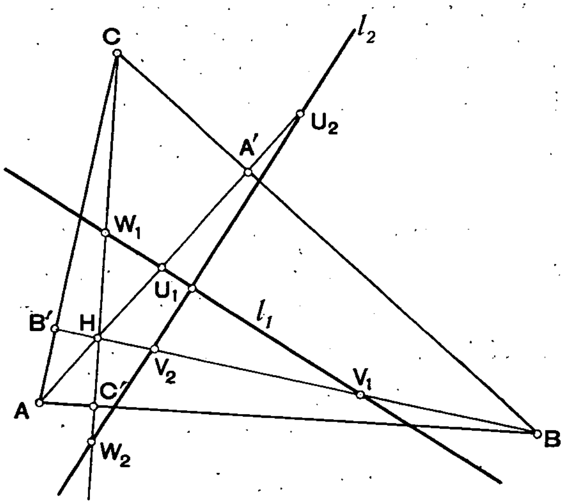



Fig. 3.

Iets anders gezegd: *voor elke niet-gelijkzijdige driehoek zijn er twee rechten $l_1$ en $l_2$ die van de hoogtelijnen* (van het hoekpunt af en naar de overstaande zijde toe gerekend) *onderling gelijke stukken afsnijden* (fig. 3).

Veronderstel eerst dat $ABC$ scherphoekig is en stel dat voor de hoeken van $ABC$ geldt $\alpha > \beta > \gamma$, zodat dus $AH < BH < CH$. Wij laten $p$ van nul af toenemen. Als $p = AH$ heeft $U$ het punt $H$ bereikt, maar $V$ en $W$ liggen nog op $BH$ en $CH$, zodat $O'$ positief is. Bereikt $V$ (voor $p = BH$) het hoogtepunt, dan is $U$ inmiddels de lijn $VW$ gepasseerd. Voor $p = CH$ is $O'$ weer positief geworden. Deze redenering geldt a fortiori voor een recht- of stomphoekige driehoek: voor $p = 0$ is $U$ of in $H$ of $U$ is $H$ reeds gepasseerd. Uit dit alles volgt: *als in een driehoek $ABC$ geldt $\alpha > \beta > \gamma$, dan is*

$$2R\cos\alpha < R - d < 2R\cos\beta < R + d < 2R\cos\gamma. \tag{6}$$

Voor een gelijkbenige driehoek moet men *twee*, voor een gelijkzijdige alle *vier* $<$-tekens door gelijktekens vervangen.

Wij merken nog op dat uit (5) volgt dat het *minimum* van $O'$ voor $p = R$ verkregen wordt; het is gelijk aan $-\dfrac{sd^2}{2R}$.

Voor $p = 2R$ wordt $O' = O$.

In onze oorspronkelijke figuur kan men ook het stuk $p$ in willekeurige richting op de hoogtelijnen afgepast denken. Daar het betoog niet verandert als men $p$ overal door zijn tegengestelde vervangt, kunnen wij ons beperken tot het geval dat twee der afgepaste stukken positief en het derde negatief is. Laat dit laatste behoren bij het hoekpunt $A$. Voor de punten $U_1$, $V$ en $W$ geldt nu

$$U_1H = AH + p,\ VH = BH - p,\ WH = CH - p \tag{7}$$

en wij vinden

$$O' = \tfrac{1}{2}(2R\cos\beta - p)(2R\cos\gamma - p)\sin\alpha$$
$$+ \tfrac{1}{2}(2R\cos\gamma - p)(2R\cos\alpha + p)\sin\beta + \tfrac{1}{2}(2R\cos\alpha + p)$$
$$(2R\cos\beta - p)\sin\gamma$$

of na een herleiding analoog met de vroegere

$$O' = \frac{-(s-a)}{2R}(p^2 + 2Rp - 2Rr_a). \tag{8}$$

Stelt men de afstand $MI_a$ van het middelpunt van de omgeschreven cirkel tot dat van de aan $BC$ aangeschreven cirkel door $d_a$ voor, dan is $d_a^2 = R^2 + 2Rr_a$ en wij krijgen voor deze situatie: *in elke driehoek zijn er twee* (verschillende) *waarden van $p$, namelijk $p = -R + d_a$ en $p = -R - d_a$ waarvoor $U_1$, $V$ en $W$ collineair zijn* (fig. 4).

In dit geval is voor grote waarden van $|p|$ het oppervlak $O'$ negatief. Het maximum van $O'$ wordt voor $p = -R$ aangenomen;

het is gelijk aan $\frac{(s-a)d_a{}^2}{2R}$. Voor $p = -2R$ vindt men weer $O' = O$.

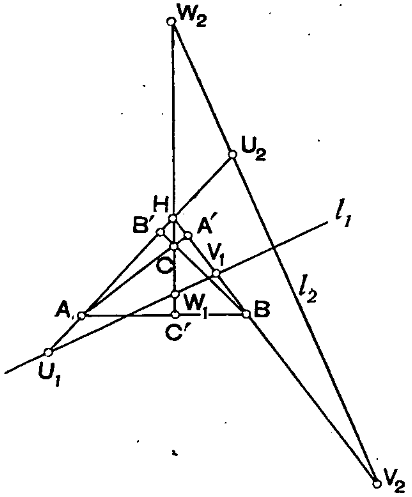



Fig. 4.

Wij keren terug tot onze oorspronkelijke driehoek $ABC$ en leiden nog een andere merkwaardige ligging van de punten $U$, $V$ en $W$ af. Beschouw daarvoor eerst op $AH$, $BH$ en $CH$ de willekeurige punten $U'$, $V'$ en $W'$; zij zullen collineair zijn als

$$V'H \,.\, W'H \sin\alpha + W'H \,.\, U'H \sin\beta + U'H \,.\, V'H \sin\gamma = 0. \quad (9)$$

Als een inversie met $H$ tot centrum $U'$, $V'$, $W'$ verwisselt met $U$, $V$ en $W$, dan is

$$U'H \,.\, UH = V'H \,.\, VH = W'H \,.\, WH,$$

*waaruit volgt dat U, V en W met H op één cirkel liggen* als

$$UH \sin\alpha + VH \sin\beta + WH \sin\gamma = 0. \quad (10)$$

Worden nu $U$, $V$ en $W$ verkregen door uit $A$, $B$ en $C$ op de hoogtelijnen telkens in positieve richting het stuk $p$ af te zetten, dan geldt weer (1).

Aan (10) is dus voldaan als

$$(2R\cos\alpha - p)\sin\alpha + (2R\cos\beta - p)\sin\beta + (2R\cos\gamma - p)\sin\gamma = 0$$

waaruit volgt

$$ps = R^2(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

of wel $p = 2r$. Dus: *past men van de hoekpunten uit telkens de middellijn van de ingeschreven cirkel op de hoogtelijnen af, dan liggen de uiteinden met H op een cirkel.*

Dit is een bekende stelling; de gevonden cirkel $\mathscr{F}$ wordt genoemd naar Fuhrmann. Hij is ook in andere opzichten merkwaardig: op $\mathscr{F}$ liggen de spiegelpunten in de zijden van de middens $P_i$ der bogen van de omgeschreven cirkel, alsmede het punt van Nagel van driehoek $ABC$, dat bovendien diametraal ten opzichte van $H$ ligt. (fig. 5).

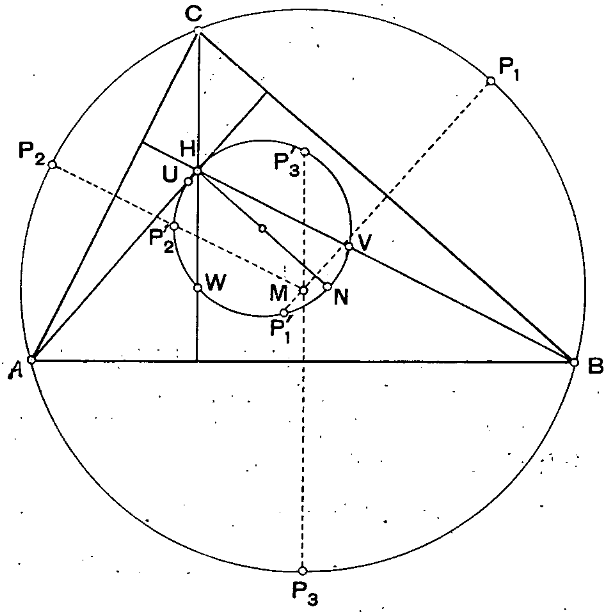



Fig. 5.

Minder bekend schijnt de variant, die op grond van de voorgaande beschouwingen thans voor de hand ligt. Past men op $AH$ in negatieve, op $BH$ en $CH$ in positieve zin het stuk $p$ af, kunnen dan de uiteinden $U$, $V$ en $W$ met $H$ op een cirkel liggen? De voorwaarde (10) luidt nu

$$(2R\cos\alpha + p)\sin\alpha + (2R\cos\beta - p)\sin\beta + (2R\cos\gamma - p)\sin\gamma = 0$$

en zij geeft het antwoord: $p = 2r_a$. De betrokken cirkel $\mathscr{F}_a$ is in fig. 6 getekend. Onbesproken blijve hier de vraag met welke wijzigingen men de genoemde andere merkwaardige eigenschappen van $\mathscr{F}$ bij $\mathscr{F}_a$ terugvindt.

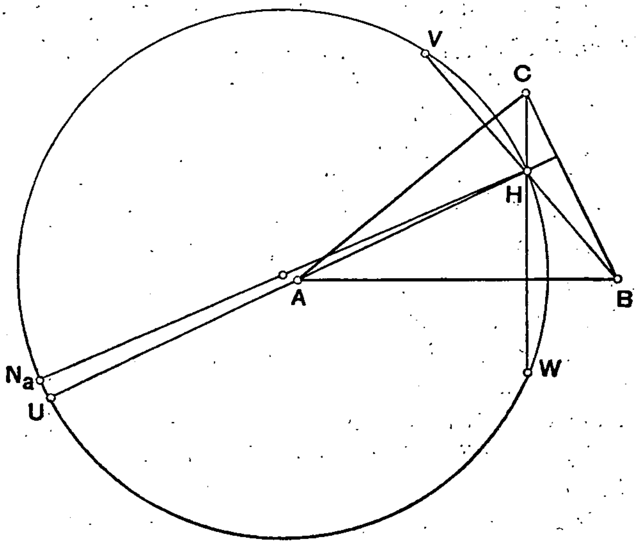



Fig. 6.

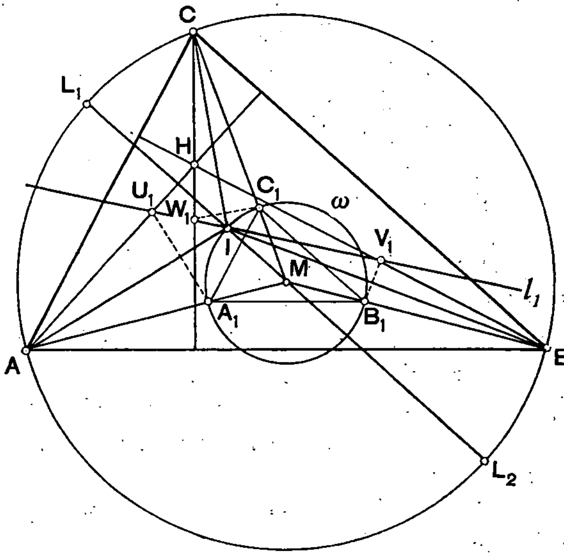



Fig. 7.

Dr. G. R. Veldkamp merkt na lezing van het voorgaande op, dat de rechten $l_1$ en $l_2$ van fig. 3 loodrechte middellijnen zijn van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Hij bewijst dit als volgt (fig. 7). De cirkel $\omega$ met straal $d$, die concentrisch is met de *omgeschreven*

*cirkel van* $\triangle ABC$, snijdt de lijnstukken $MA$, $MB$ en $MC$ opvolgend in $A_1$, $B_1$ en $C_1$. De punten $U_1$, $V_1$ en $W_1$ behorende bij de waarde $p_1 = R - d$ van $p$ zijn nu (daar $H$ en $M$ in $\triangle ABC$ isogonaal verwant zijn) juist de spiegelpunten van $A_1$, $B_1$ en $C_1$ opvolgend in $AI$, $BI$ en $CI$. Daar deze rechten evenwijdig zijn met de deellijnen van $\triangle A_1B_1C_1$ krijgt men een lijn evenwijdig met $IU_1$ door $A_1I$ te spiegelen in de deellijn van $\angle C_1A_1B_1$. *Dit laatste geeft echter een rechte met een richting die alleen van I afhangt*; het is nl. de rechte die $A_1$ verbindt met het oneigenlijke punt dat t.o.v. $\triangle A_1B_1C_1$ isogonaal verwant is met $I$. Bijgevolg ligt $U_1$ op de lijn door $I$ evenwijdig met laatstgenoemde rechte. Hieruit besluit men dat $U_1$, $V_1$ en $W_1$ op een door $I$ gaande rechte $l_1$ liggen. Zijn $A_2$, $B_2$ en $C_2$ de spiegelbeelden van $A_1$, $B_1$ en $C_1$ in $M$ dan is de relatie tussen $U_2$, $V_2$ en $W_2$ enerzijds en $\triangle A_2B_2C_2$ anderzijds dezelfde als die tussen $U_1$, $V_1$ en $W_1$ en $\triangle A_1B_1C_1$. Deze opmerking voert nu direct tot de slotsom dat $U_2$, $V_2$ en $W_2$ op een rechte $l_2$ door $I$ loodrecht op $l_1$ liggen. Zijn $L_1$ en $L_2$ de snijpunten van $IM$ met de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$, dan zijn $l_1$ en $l_2$ de rechten die $I$ verbinden met de (oneigenlijke) punten, die t.o.v. $\triangle ABC$ isogonaal verwant zijn met $L_1$ en $L_2$. Een andere manier om hetzelfde te zeggen is: $l_1$ en $l_2$ zijn de rechten door $I$ evenwijdig aan de asymptoten van de door $A$, $B$, $C$, $H$ en $I$ gaande orthogonale hyperbool.

Men kan volgens Veldkamp de vraag van meet af aan geheel meetkundig behandelen. Veronderstel daartoe, dat men op de hoogtelijnen 3 punten $U$, $V$, en $W$ heeft vastgelegd door van elk van de hoekpunten uit het stuk $p$ op de betreffende hoogtelijn af te passen. De rechten door $U$, $V$ en $W$ opvolgend evenwijdig met $BC$, $CA$ en $AB$ sluiten een driehoek $A_3B_3C_3$ in. Neemt men $p = 0$, dan is dit de driehoek $A_0B_0C_0$ waarvan de gegeven driehoek $ABC$ de driehoek der middens is. Het is nu direct duidelijk, dat $\triangle A_3B_3C_3$ uit $\triangle A_0B_0C_0$ ontstaat door de laatste ten opzichte van het middelpunt van zijn ingeschreven cirkel, of van één van zijn aangeschreven cirkels, met een geschikte factor te vermenigvuldigen. In fig. 8 zijn $U$, $V$ en $W$ zo gekozen dat het centrum van vermenigvuldiging het middelpunt $N$ van de ingeschreven cirkel van $\triangle A_0B_0C_0$ is; $N$ is tevens het punt van Nagel van $\triangle ABC$. Opgemerkt zij, dat $\triangle A_3B_3C_3$ zich tot het punt $N$ kan samentrekken. Dit is het geval, als de vermenigvuldigingsfactor nul is en dus $p = 2r$. De omgeschreven cirkel van $\triangle UVW$ is nu de cirkel op $HN$ als middellijn, dus de cirkel van Fuhrmann. Bij deze beschouwingswijze is $\triangle UVW$ *steeds de voetpuntsdriehoek van H (een vast punt) ten opzichte van de veranderlijke driehoek* $A_3B_3C_3$.

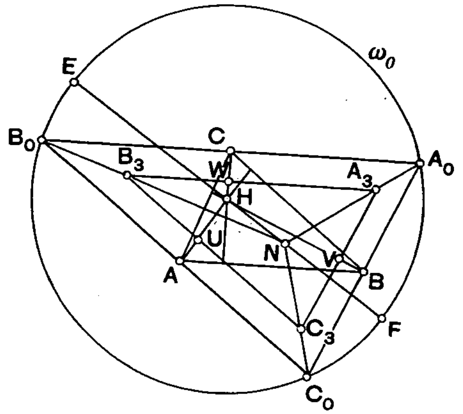



Fig. 8.

Wenst men $U$, $V$ en $W$ collineair te krijgen, dan moet men de vermenigvuldigingsfactor $f$ zo kiezen, dat $H$ ligt op de omgeschreven cirkel $\omega_3$ van $\triangle A_3B_3C_3$; nu is $\omega_3$ de produktfiguur van cirkel $A_0B_0C_0 = \omega_0$. Zijn $E$ en $F$ de snijpunten van $HN$ met $\omega_0$ ($H$ tussen $E$ en $N$), dan moet $f$ dus zo worden gekozen dat $E$ overgaat in $H$, of zo, dat $F$ overgaat in $H$. In het eerste geval ($l_1$) vindt men

$$f_1 = \frac{d}{R+d}$$

en

$$p_1 = 2r - \frac{2dr}{R+d} = \frac{2Rr}{R+d} = \frac{R^2 - d^2}{R+d} = R - d.$$

In het tweede geval ($l_2$) is

$$f_2 = -\frac{d}{R-d}$$

en

$$p_2 = 2r + \frac{2dr}{R-d} = R + d.$$

Opgemerkt zij, dat $l_1$ en $l_2$ produktfiguren zijn van de *rechten van* Wallace van $E$ en $F$ t.o.v. $\triangle A_0B_0C_0$; zij staan dus loodrecht op elkaar.

# TRANSFORMATIEMEETKUNDE IN DE LAGERE KLASSEN VAN HET V.H.M.O. [1]

door

R. TROELSTRA

Hilversum

Eeuwenlang is aan de schoolmeetkunde de naam van Euclides onlosmakelijk verbonden geweest. Zo sterk is deze band, dat men in Engels sprekende landen het vak meetkunde dikwijls kortweg aanduidt met „Euclid". Dit is ook te begrijpen: de *Elementen van Euclides* vormen immers een van de grootste prestaties van de menselijke geest in de klassieke oudheid. De schoolboekjes voor meetkunde, die wij in onze jeugd gebruikten waren dan ook in het algemeen bewerkingen van deze *Elementen*. Bewerkingen, immers ieder die zich met de *Elementen van Euclides* heeft beziggehouden weet, dat ze in hun oorspronkelijke vorm te moeilijk zijn voor kinderen van twaalf jaar. Maar toch was de gang van zaken in de genoemde schoolboeken, die ik als traditioneel zal aanduiden, die van Euclides. Vele generaties hebben op deze wijze meetkunde geleerd en lang heeft men dit als volkomen bevredigend aanvaard. Toch was reeds tegen het einde van de vorige eeuw een zeker onbehagen merkbaar, een onbehagen dat sindsdien steeds sterker is geworden. Zonder dit verschijnsel te willen analyseren, wil ik toch op twee aspecten wijzen:

Ten eerste. De tegenwoordige wiskundige methodes zijn geheel anders dan die van de Grieken. Om in de schoolwiskunde te blijven: vergelijk de eenheid van methode in de analytische meetkunde met de veelheid van maniertjes, hulplijntjes en kunstgrepen bij Euclides. Men vraagt zich daarom af, of het leren van meetkunde op traditionele wijze wel van belang is voor de verdere wiskundige ontwikkeling van de leerling.

Ten tweede. Men krijgt wel eens de indruk, dat leerlingen van de lagere klassen met de traditionele meetkunde steeds meer moeite krijgen. Mocht die indruk juist zijn, dan zal het feit dat de bevolking van de middelbare school zo sterk is toegenomen hieraan wel niet vreemd zijn. Het is trouwens wel zeer de vraag in hoeverre het gros

[1] Voordracht gehouden voor de vergadering van Liwenagel te Driebergen op 30 augustus 1963.

van de leerlingen vroeger de meetkunde heeft begrepen. Het is denkbaar, dat men vroeger eerder dan thans genoegen nam met een kennen van de algoritmen zonder werkelijk inzicht. Bij het steeds ingewikkelder worden van de maatschappij moeten wij er echter voor zorgen, onze leerlingen niet te belasten met onbegrepen weetjes; alleen goed verwerkte kennis is van waarde.

Reeds is er allerlei gedaan om in de onbevredigende toestand verbetering te brengen. Men begint thans de meetkunde veelal met een intuïtieve inleiding, men verschuift de omkering van stellingen naar een later stadium, allerlei vervelende kwesties worden geschrapt, soms spreekt men niet meer over axioma's, enz. De meeste van deze punten zijn inderdaad verbeteringen, maar ik kan mij heel goed voorstellen, dat dit alles op een leraar van de oude stempel de indruk maakt van afbraak. Het is ook waar, dat veel van wat de methode van Euclides voor de kenner zo aantrekkelijk maakt, namelijk de logische draad die door het betoog loopt, verloren gaat.

Het is daarom zaak uit te zien naar een methode die voor dit verlies iets anders in de plaats stelt. Zo'n methode is er. In allerlei landen is men reeds bezig het meetkunde-onderwijs op nieuwe leest te schoeien door gebruik te maken van transformaties. Dit is een gedachte die voor het eerst geheel is uitgewerkt door Felix Klein (1849—1926), maar die pas langzamerhand in de schoolmeetkunde gaat doordringen. Onder andere in Duitsland is men thans doende onder namen als „Bewegungsgeometrie" en „Abbildungsgeometrie" deze nieuwe methode op school in te voeren.

In 1958 zijn we met een groepje van vier leraren aan het Chr. Lyceum te Hilversum begonnen, van deze ontwikkeling een studie te maken. De aandrang hiertoe ging uit van het „*Meetkunde-Project II*" van Prof. Dr. A. D. de Groot van de Universiteit van Amsterdam. Ik zal op dit project hier nu niet ingaan, er zal trouwens binnen afzienbare tijd een uitvoerig verslag van verschijnen. In het kort begon onze studie met een kennisnemen van de literatuur, het bijwonen van enige lessen aan Duitse scholen en het confronteren van de opgedane ervaringen met ideeën die wij onszelf reeds in vroegere jaren hadden gevormd. Hoewel wij van onze Duitse ervaringen zeer veel hebben geleerd, konden we toch maar weinig direct gebruiken. Vooral de Duitse schoolboeken zijn heel anders van opzet dan wij zijn gewend en ook dan wij zouden wensen.

Wat ons voor ogen stond was een behandeling van de in ons land gebruikelijke leerstof vlakke meetkunde geheel gegrond op transformaties, die we toen nog als bewegingen opvatten. We hebben

toen een leergang *„Bewegingsmeetkunde"* ontworpen, die we met ingang van 1960 gedurende twee jaar in stencilvorm op school hebben gebruikt. [1])

In deze leergang worden behandeld:

In klas I: de congruentie-transformaties, te weten spiegeling, rotatie en translatie. Deze nemen de plaats in van de bekende congruentiegevallen van de driehoek, die overbodig zijn geworden.

In klas 2: de gelijkvormigheidstransformatie en één affine transformatie, namelijk de zogenaamde afschuiving.

In klas 3 h.b.s. of 3 en 4 gymn. (na de behandeling van de cirkel): het samenstellen van transformaties en het begrip groep. Omdat het moeilijk is deze omvangrijke materie in kort bestek samen te vatten, zal ik mij in hoofdzaak beperken tot opmerkingen over de congruentietransformaties.

*Verplaatsingen*

Euclides gebruikt in de *Elementen* bij drie gelegenheden verplaatsingen. (Boek I–4; I–8 en III–24), terwijl hij overal elders verplaatsingen angstvallig vermijdt. Als hij in boek I, propositie 2 de constructie beschrijft van een lijnstuk even lang als een gegeven lijnstuk, dan geschiedt dit op uiterst omzichtige wijze, elke stap wordt verantwoord. Maar bij het bewijs van congruentiegeval ZHZ (Boek I–4) wordt de ene driehoek zonder schroom op de andere gelegd. Dat is niet consequent; wenst men geen verplaatsingen te gebruiken dan kan men beter een van de congruentiegevallen als axioma aannemen, zoals Hilbert in zijn *„Grundlagen der Geometrie"* gedaan heeft en om een Nederlands schoolboek te noemen: zoals Alders in zijn *„Planimetrie"* doet.

Men kan ook de andere weg inslaan en het gebruik van ver-

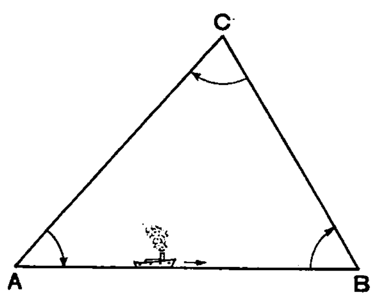



Fig. 1

[1]) Een bewerking van deze leergang is onder de titel „Transformatiemeetkunde" in boekvorm verschenen.

plaatsingen voor geoorloofd verklaren. Dat dit ook bezwaren heeft, blijkt uit het volgende bekende bewijsje voor de stelling: de som der hoeken van een driehoek is 180°.

Beschouw de zijden van △ABC als kanalen en laat het schip rondvaren. Bij B draait het schip over de hoek B en vaart achteruit naar C. Na over hoek C te zijn gedraaid vaart het vooruit naar A. Tenslotte komt het na draaiing over hoek A achteruitvarend op zijn oorspronkelijke plaats terug. Het schip is nu 180° gedraaid, dus $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

(Nog leuker is het, het schip over de buitenhoeken te laten draaien, men vindt dan voor elke convexe veelhoek als som van de buitenhoeken 360°).

Hoe aardig dit bewijs ook is, het heeft het grote bezwaar, dat stilletjes een veronderstelling is binnengeslopen, die equivalent is met het vijfde postulaat van Euclides (het parallellenpostulaat), een veronderstelling die de leerlingen niet zullen ontdekken. Dit is, naar ik meen, oneerlijk. Een goede leerling, die later kennis maakt met niet-euclidische meetkunde moet naar mijn mening zich uit de lagere klasse een aanknopingspunt te binnen kunnen brengen in de vorm van een afspraak (wel of niet axioma genoemd), die van later, hoger standpunt bekeken ook anders had kunnen zijn. Didactisch de beste afspraak lijkt mij hier dan: als van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is de vierde hoek ook recht.

Zo kan men dan bezwaar maken tegen allerlei los-weg verplaatsingen, zoals men bij zogenaamde bewijzen van congruentiegevallen wel gebruikt. Wil men in de meetkunde van verplaatsingen gebruik maken, dan zal men die verplaatsingen netjes moeten omschrijven en de spelregels dienen aan te geven die in acht moeten worden genomen. Wellicht doet men dan ook beter niet meer van verplaatsingen, maar van transformaties of afbeeldingen te spreken. De laatste terminologie is om allerlei redenen beter. Om drie punten te noemen:

a. Bij „verplaatsen" wekt men de indruk dat de oorspronkelijke figuur van zijn plaats verdwijnt en elders weer opduikt. Het is echter beter te zeggen dat er een figuur bij komt, de beeldfiguur.

b. Het woord verplaatsen is moeilijk toe te passen op andere dan congruentietransformaties. Zo zal men vermenigvuldigen bezwaarlijk verplaatsen kunnen noemen.

c. De spiegeling opgevat als verplaatsing vereist een hogere dimensie dan de werkruimte waarin men bezig is. Bij vlakke meetkunde is dat nog te doen, omdat de leerlingen de derde dimensie kennen. Maar hoe moet dat in de stereometrie? Hoe verplaatst men een rech-

terschoen zo dat het een linker wordt?

De uitdrukkingen „transformatie" en „afbeelding" zijn dus te verkiezen boven „verplaatsing" en „beweging".

*Transformaties.*

De eerste transformatie die aan de orde komt is ongetwijfeld de spiegeling. De begrippen „spiegelen" en „symmetrie" zijn de kinderen wel bekend; men kan ze demonstreren met een spiegeltje, men kan van allerlei figuren de symmetrieassen opzoeken enzovoort. Een heel eenvoudige, zeer bruikbare spiegelsymmetrische figuur is de vlieger. Nadat men, intuïtief bezig, de eigenschappen van de vlieger heeft bekeken, kan men die figuur prachtig gebruiken om de bekende constructies zoals „een hoek middendoordelen" in te voeren. Hoe lang een leraar op intuïtieve wijze door wil gaan zal van zijn leerlingen en van zijn persoonlijke opvattingen afhangen. Mijns inziens kan men al spoedig enigszins gaan systematiseren door de regels van het spiegelen te behandelen. Men zal beginnen met op te merken, dat bij spiegeling om een as $l$ voor punt $P$ en beeldpunt $P'$ geldt:

1. $P$ en $P'$ liggen op een lijn loodrecht op de spiegelas.
2. $P$ en $P'$ liggen even ver van de spiegelas verwijderd.

Desgewenst kan men dit de definitie van spiegeling noemen. Men zal hierbij opmerken, dat het hele vlak aan de spiegeling deelneemt, ook al tekenen we niet van elk punt het beeldpunt. Als men in de spiegel kijkt wordt immers ook de omgeving meegespiegeld, ook al let men alleen op zijn eigen gezicht.

Over de spiegel die we gebruiken, kunnen we nu enkele afspraken maken. Het moet geen lachspiegel zijn, die alles vervormt; ook geen scheerspiegel of autospiegel, die de dingen vergroot of verkleint. Deze afspraken vatten we samen in de regels:

3. Het spiegelbeeld van een rechte lijn is weer recht.
4. Het spiegelbeeld van een lijnstuk is een even groot lijnstuk.
5. Het spiegelbeeld van een hoek is een even grote hoek.

Deze drie regels kan men desgewenst axioma's noemen. Uit de bovengenoemde regels kan men dan nog enkele andere afleiden.

Heeft men eenmaal de beschikking over deze regels, dan kan men de eigenschappen afleiden van spiegelsymmetrische figuren zoals gelijkbenige driehoek, ruit, rechthoek, gelijkbenig trapezium. De enige moeilijkheid die zich hierbij voordoet is het aantonen van het bestaan van de symmetrieassen van die figuren. Vooral bij het gelijkbenig trapezium is dit lastig. Men kan deze moeilijkheid omzeilen op de wijze van van Hiele in zijn onlangs verschenen

boek *Van Figuren naar Begrippen*. Daar wordt het gelijkbenig trapezium als volgt gedefinieerd:

Iedere vierhoek, die een symmetrieas heeft, die niet samenvalt met een diagonaal, noemt men gelijkbenig trapezium.

Dit is heel handig en zeer het overwegen waard, maar toch verdienen dergelijke definities mijns inziens geen aanbeveling. Ik moet hier even een zijpad betreden en iets zeggen over de definities in de meetkunde in de eerste klas.

Deze moeten mijns inziens bij voorkeur niet anders zijn dan een verklaring van het woord dat men gebruikt: „Onder een rechthoek verstaat men een vierhoek met vier rechte hoeken". „Vier", niet „drie".

Vraagt men bijvoorbeeld aan te tonen: de middens $P$, $Q$, $R$ en $S$ van de zijden van een ruit $ABCD$ vormen de hoekpunten van een rechthoek, dan moet de leerling weten, wat hij moet bewijzen, namelijk, dat de hoeken $P$, $Q$, $R$ en $S$ recht zijn. Hij moet dus precies weten wat met het woord rechthoek bedoeld wordt en de definitie dient om hem dat te vertellen.

Een definitie à la Aristoteles: „onder een rechthoek verstaat men een parallellogram met één rechte hoek", wordt door kinderen in de eerste klas wel uit het hoofd geleerd, maar niet echt verwerkt. Pas later, bij de stamboom van de vierhoeken kan hij desgewenst aan de orde komen.

Men zou ook kunnen definiëren: Iedere vierhoek, die twee symmetrieassen heeft, die niet met diagonalen samenvallen, heet rechthoek. Ik heb deze definitie nog niet aangetroffen, hij is ook niet aan te bevelen.

Indien men het aantonen van het bestaan van symmetrieassen bij sommige figuren te lastig vindt, dan kan men waarschijnlijk beter met het intuïtieve inzicht genoegen nemen.

De behandeling van de rechthoek verdient bijzondere aandacht. Indien we een rechthoek gaan tekenen volgens de definitie, dus door de hoeken recht te maken, dan merken we dat we maar drie hoeken recht hoeven te maken; de vierde wordt vanzelf recht. Hier komt dan het reeds genoemde „axioma van de vierde rechte hoek" te voorschijn. Aansluitend op de rechthoek wordt de theorie van de evenwijdige lijnen gegeven uitgaande van de definitie van Fladt: Men noemt twee lijnen evenwijdig als ze een gemeenschappelijke loodlijn hebben. Deze definitie is volgens het voorafgaande voor kinderen niet helemaal ideaal. Denkt men aan een spoorlijn, waarbij de rails overal even wijd moeten zijn, dan wijst het woord „evenwijdigheid" op de gelijke lengte van de dwarsliggers dus op de

equidistantie van de lijnen. In de definitie is echter maar één dwarsligger opgenomen. De theorie van de evenwijdige lijnen heeft ons veel tijd gekost; we wilden namelijk graag met wat origineels voor den dag komen. Maar ondanks alle pogingen hebben wij niets kunnen vinden dat evengoed voldoet als de manier van Fladt, die prachtig in het geheel van onze opzet past en didactisch zo voortreffelijk is.

Drie opmerkingen:

1. Een aardig bijprodukt van de definitie van Fladt is, dat een lijn ook evenwijdig is met zichzelf. Evenwijdigheid is dan reflexief, symmetrisch en transitief. Het is dus een equivalentie-relatie, die een klasseïndeling geeft van de rechten in het vlak. Zo'n klasse is dan een richtingen-paar (twee tegengestelde richtingen).

2. Bij de traditionele definitie van evenwijdigheid is de stelling: „Als $a//c$ en $b//c$, dan is $a//b$," niet correct omdat $a$ en $b$ kunnen samenvallen.

3. Het moet interessant zijn na te gaan, wat in de school-stereometrie de consequenties zijn van definities als de volgende:
Twee lijnen heten evenwijdig als ze een gemeenschappelijk loodvlak hebben.
Twee vlakken heten evenwijdig als ze een gemeenschappelijke loodlijn hebben.
Eventueel: Een lijn en een vlak heten evenwijdig, als ze een gemeenschappelijke loodlijn hebben (of een gemeenschappelijk loodvlak).

Nadat zo de vruchten van de spiegeling zijn geplukt komen de rotatie en de translatie aan de orde als resultante van twee spiegelingen. In het afgelopen schooljaar heb ik deze transformaties in de klas beoefend met een rooster van vierkantjes als in figuur 2.

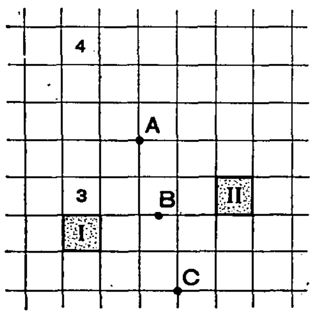


Fig. 2

De symmetrieassen van deze tegelvloer blijken te zijn: de zijden, de middelloodlijnen van de zijden en de diagonalen van de vierkantjes.

Hoe kunnen we nu vierkant II krijgen als beeldfiguur van vierkant I na tweemaal spiegelen om de genoemde symmetrieassen? Dit blijkt verband te houden met de vraag: Hoe kom ik op een schaakbord met een koningin in twee zetten van I naar II?

Stel, men wil via veld 3 gaan. De bijbehorende spiegelassen zijn dan de horizontale en de verticale lijn door het punt *B*. Gemakkelijk gaat men nu na, dat de resultante van deze twee spiegelingen een rotatie is om *B* over 180°.

Gaat men via veld 4, dan vindt men een rotatie om punt *A* over 90°. De bijbehorende spiegelassen maken een hoek van 45° met elkaar. Men kan dit alles prachtig als beweging demonstreren door op de tekening een doorschijnend stuk papier te leggen, waarop men de hele tegelvloer overtrekt. Dit is van belang om te laten zien, dat het hele vlak aan de transformatie deelneemt. Vierkant I kan men voor de duidelijkheid rood kleuren. Met behulp van een speld geprikt in punt A, B of C kan men de nodige draaiingen gemakkelijk uitvoeren.

Het opzoeken van de verschillende mogelijkheden is voor de kinderen naar uit ervaring blijkt een leuk spelletje. Men dient er wel voor te zorgen, dat steeds wordt geconstateerd:

a. Het centrum van de rotatie is het snijpunt van de beide spiegelassen.

b. De hoek waarover geroteerd wordt is het dubbele van de hoek tussen de beide spiegelassen.

Deze stelling kan men daarna algemeen bewijzen.

De gevonden rotaties worden nauwkeuriger nagegaan door bij de hoekpunten van vierkant I letters te plaatsen en dan uit te zoeken waar de beeldpunten bij vierkant II liggen.

Er kan ook worden opgemerkt, dat het middelpunt van vierkant II steeds het beeldpunt is van het middelpunt van vierkant I en dat *A*, *B* en *C* liggen op de middelloodlijn van de verbindingslijn van die middelpunten.

We hadden in fig. 2 de vierkanten I en II ook in dezelfde rij of kolom of diagonaalrichting kunnen nemen. In dat geval krijgen we de mogelijkheid om twee evenwijdige spiegelassen te kiezen. Dan vinden we een nieuwe transformatie: de translatie. Hierbij komt op natuurlijke wijze het begrip „vector" te voorschijn.

Allicht vraagt men zich dan af of ook in het vorige geval een translatie is aan te wijzen waarbij II de beeldfiguur is van I. Dit is inderdaad het geval, alleen zijn de bijbehorende spiegelassen dan geen symmetrieassen van de tegelvloer.

Ook hier zal men het verband tussen de verschuivingsvector en de spiegelassen in een stelling formuleren en deze stelling daarna bewijzen.

De rotatie en de translatie kunnen vervolgens op meetkundige figuren worden toegepast. Speciaal de rotatie om 180°, ook punt-

spiegeling genoemd is hierbij van belang. Zo volgen alle stellingen van het parallellogram uit het feit dat het een puntsymmetrische figuur is.

Hier aangekomen kan men congruente figuren als volgt definieren: „Onder congruente figuren verstaan we figuren, die elkaars beeldfiguur zijn door één of meer van de transformaties spiegeling, rotatie en translatie". Uit de regels van de spiegeling en het feit dat rotatie en translatie dubbele spiegelingen zijn volgt dan de stelling: Als twee figuren congruent zijn, dan is

a. elk lijnstuk in de ene figuur even lang als zijn beeldlijnstuk in de andere figuur.
b. elke hoek in de ene figuur even groot als zijn beeldhoek in de andere figuur.

We spraken in de definitie van congruente figuren van „één of meer transformaties". Dit „of meer" kan worden weggelaten als men ook de vierde congruentietransformatie invoert: de schuifspiegeling of glijspiegeling. Hierdoor kan men dan komen tot het begrip groep van congruentietransformaties. Dit zal voor de eerste klas van de middelbare school veel te ver voeren. In onze leergang hebben we de vraag hoe men twee achter elkaar uitgevoerde congruentietransformaties kan vervangen door één transformatie uitgesteld tot deel III. Daar behandelen we dan dit samenstellen van transformaties, de begrippen identieke transformatie en inverse transformatie en het begrip groep.

De groep van congruentietransformaties bevat talloze interessante ondergroepen, die zich uitstekend lenen voor behandeling op school. Om maar enkele te noemen:
de groep der rechtstreekse congruentietransformaties (rotatie en translatie);
de groep van de translaties;
de groep van rotaties om een vast punt;

Vooral interessant zijn eindige groepen, zoals de groep van de transformaties die een gegeven vierkant in zichzelf overvoeren. Sommige van deze groepen zijn commutatief, andere niet. Opgemerkt kan worden, dat bijvoorbeeld de verzameling van alle rotaties geen groep is.

Deze kwesties zijn bij een niet te snel tempo van behandeling in de derde of vierde klas zeker niet te moeilijk. Zelfs kan worden overwogen bepaalde eenvoudige gevallen naar een vroeger stadium te verschuiven.

*Vraagstukken*

Er wordt mij dikwijls de vraag gesteld, of men met transformatie-

meetkunde ook zo prettig allerlei vraagstukjes kan maken als met de traditionele methode. Het is moeilijk deze vraag zonder meer met ja of neen te beantwoorden. Men kan inderdaad vele en interessante problemen met transformatie-meetkunde oplossen, hoewel we nog niet beschikken over enorme vraagstukkenverzamelingen, zoals die in de loop der tijden voor de traditionele meetkunde zijn gemaakt. Het nut van een dergelijke verzameling zou ook twijfelachtig zijn.

De plaats die het vraagstuk in de schoolmeetkunde inneemt is al dikwijls in discussie geweest. De vraagstukken-cultus die men vroeger wel aantrof is, dunkt mij, wel wat voorbij. Wijzelf zijn de mening toegedaan, dat men zich zoveel mogelijk moet beperken tot vragen die kunnen dienen als toelichting, uitbreiding of rechtstreekse toepassing van de theorie. Dit neemt niet weg, dat men soms bij vraagstukken met een puzzle-karakter met transformatie-meetkunde een elegante oplossing krijgt. Ik zou dit willen demonstreren met een voorbeeld ontleend aan een mondelinge mededeling van Dr. H. G. Steiner uit Münster.

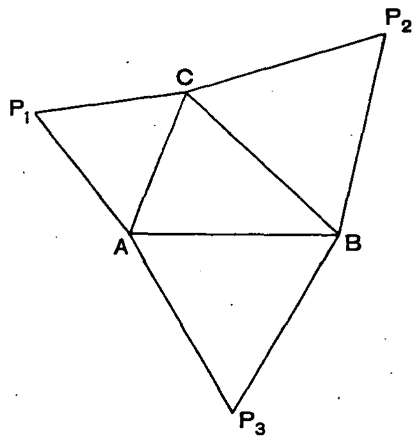



Fig. 3.

Op de zijden van $\triangle ABC$ denkt men zich buitenwaarts de gelijkzijdige driehoeken $ACP_1$, $CBP_2$ en $BAP_3$ beschreven. Als nu de punten $P_1$, $P_2$ en $P_3$ gegeven zijn, construeer dan $\triangle ABC$.

Analyse: (zie fig. 3.). Voer achtereenvolgens uit de rotaties

$$\mathcal{R}_1 = (P_1, +60^\circ);$$
$$\mathcal{R}_2 = (P_2, +60^\circ);$$
$$\mathcal{R}_3 = (P_3, +60^\circ).$$

De resultante van deze drie rotaties is een rotatie over 180°. De beeldpunten van punt A zijn achtereenvolgens:

$$A' = C;\ A'' = B;\ A''' = A.$$

Blijkbaar valt $A'''$ met $A$ samen, dus $A$ is het centrum van genoemde rotatie over 180°.

Constructie: Neem een willekeurig punt $X$ van het vlak en bepaal $X'''$. Dan is $A$ het midden van $XX'''$. Daarna is $C = A'$ en $B = A''$.

De constructie kan nog worden vereenvoudigd door het punt $X$ in $P_1$ te kiezen.

In het voorafgaande heb ik getracht u enkele aspecten van het onderwijs in vlakke meetkunde met transformaties te laten zien. U weet, dat men allerwege druk bezig is met pogingen het schoolprogramma voor de wiskunde te herzien. Uit de discussies over deze herziening blijkt, dat de meetkunde gevaar loopt in de hoek te komen waar de slagen vallen. Ik hoop, dat u het net als ik jammer zou vinden, als het vak meetkunde het loodje zou leggen. Misschien zult u dan een bescheiden poging om het vak te redden door het moderner op te zetten met enige welwillendheid bezien. Wij verbeelden ons niet, op dit terrein het laatste woord gesproken te hebben. Er zal zeker in de methode van de transformatiemeetkunde nog wel een en ander aangevuld, gewijzigd of didactisch beter ingekleed moeten worden.

De beperking die we ons hebben opgelegd, namelijk om ons te houden aan de voorgeschreven leerstof van het thans geldende programma, maakte, dat wij niet altijd de weg konden bewandelen die wij graag zouden willen. Zo is het bijvoorbeeld zeer aantrekkelijk om reeds in de eerste klas de symmetrie-eigenschappen van enkele ruimtefiguren als de kubus en de regelmatige piramide te behandelen. Dit maakt echter de leerstof voor de eerste klas te omvangrijk, als men tenminste niet met een uiterst summiere en daardoor vrij waardeloze behandeling wil volstaan.

We hebben ons de genoemde beperking opgelegd, om het mogelijk te maken de nieuwe methode reeds nu in praktijk te brengen, zonder al te grote aanpassingsproblemen te scheppen.

Inderdaad blijken de problemen die ontstaan bij blijven zitten of bij het tussentijds overkomen van een andere school, voorzover we hebben meegemaakt, nauwelijks de moeite waard te zijn. Hierbij hebben we natuurlijk de overgang van transformatiemeetkunde naar traditionele methode niet kunnen waarnemen; wie weet dus welke last wij aan collega's hebben bezorgd.

Ook de aanpassing bij de nog op traditionele wijze gegeven stereometrie zal weinig moeilijkheden opleveren.

De kinderen die voor het eerst meetkunde krijgen en die dus niet gehinderd worden door reeds vroeger verkregen traditionele opt ingen, reageren op de nieuwe methode in 't algemeen heel gun-

stig; men kan met plezier met ze werken. Onze indruk is, dat ze veel meer meetkundig bezig zijn dan bij het oplossen van allerlei hoekberekeningen, congruentie-puzzeltjes en dergelijke. Natuurlijk is een goede leiding van de leraar een vereiste. En nu komt tenslotte de adder onder het gras vandaan: er is hier wel terdege een aanpassingsprobleem, namelijk dat van de aanpassing van de leraar aan de nieuwe methode. Wij zijn dikwijls aan traditionele denkwijzen zo gewend geraakt, dat het erg moeilijk is over te schakelen op iets anders. Wij lopen gevaar de traditionele bewijzen en vraagstukken zo goed te kennen, dat we ze als erg gemakkelijk, ja als vanzelfsprekend gaan beschouwen. Zou men dus op transformatiemeetkunde willen overgaan, dan is het van belang zich goed voor te bereiden. Anders is de kans groot, dat men op een gegeven moment verzucht: wat ben ik begonnen, die congruentiegevallen waren toch veel gemakkelijker.

Maar wie de moeite wil nemen wordt ruimschoots beloond. Het is interessant de zaak weer eens van een andere kant te benaderen; het geeft voortdurend een verrassend nieuwe kijk op allerlei van ouds bekende kwesties.

Het mooie van ons vak is immers ook niet, dat we elk jaar onszelf herhalen, maar integendeel dat we telkens opnieuw aan jonge mensen de eeuwig jonge wiskunde brengen op steeds weer nieuwe wijze.

## DE AMERIKAANSE TEST

De beide vorige jaren is door een vrij groot aantal scholieren deelgenomen aan een test, die afkomstig was van de Mathematical Association of America en de Society of Actuaries [1]). Ook dit jaar zal het mogelijk zijn uw leerlingen aan de test te doen deelnemen. Hij is bestemd voor leerlingen van de klassen 4 en 5 van de h.b.s.-B en van de klassen 5 en 6 van het gymnasium-B. Alleen volledige klassen kunnen aan de test deelnemen en geen onderverzamelingen van liefhebbers; anders wordt het vergelijken van de Nederlandse met de Amerikaanse resultaten bemoeilijkt.

Mag ik voor 20 februari bericht van u ontvangen hoeveel exemplaren u van de test wenst te ontvangen? De vergoeding bedraagt weer 13 cent per exemplaar. Voor de docenten hoop ik enige exemplaren van de Engelse tekst te kunnen bijvoegen, tenminste als ze niet weer verloren gaan bij het transport tussen de V.S. en Nederland.

P. G. J. Vredenduin
Kneppelhoutweg 12
Oosterbeek

[1]) Zie Euclides **37** (1961-62), p. 286, **38** (1962-63) p. 25, en p. 311.

# THEORIE DER GRAPHEN [1])

door

DR. J. CH. BOLAND

Naarden

Wij beginnen onze beschouwingen met het volgende vraagstuk. In een studentenvereniging is ieder lid bevriend met een aantal (minstens één) van de andere leden. Is het nu mogelijk de leden van deze vereniging zo in twee groepen te splitsen, dat twee vrienden nooit tot dezelfde groep behoren.

Een dergelijk vraagstuk is duidelijk een kombinatorische kwestie. We hebben nu in de graphentheorie een taal, die vaak bijzonder geschikt is voor het bespreken en zo mogelijk oplossen van dergelijke kombinatorische problemen.

In ons vraagstuk hebben we te maken met:

1) een verzameling $A$ van studenten

2) een binaire relatie $R(x, y)$, die als volgt gedefinieerd is: voor $x \in A$ en $y \in A$ geldt dan en slechts dan de relatie $R$, als $x \neq y$ en $x$ bevriend is met $y$.

We nemen hierbij aan dat de relatie $R$ symmetrisch is, d.w.z. zodra $x$ bevriend is met $y$, is ook omgekeerd $y$ bevriend met $x$.

Onder een graph verstaan we nu een verzameling $A$ tezamen met een op $A$ gedefinieerde binaire symmetrische relatie.

In principe mag de verzameling $A$ een willekeurige machtigheid hebben. De machtigheid van $A$ noemen we ook wel de machtigheid van de graph $[A,R]$. We zullen ons beperken tot de beschouwing van eindige graphen. Van deze graphen kunnen we nu op de volgende manier een eenvoudige geometrische representatie geven.

Aan ieder element $x$ van $A$ voegen we een punt toe, dat we eveneens $x$ noemen. Geldt voor twee elementen $x$ en $y$ van $A$ de relatie $R(x, y)$, dan verbinden we de punten $x$ en $y$ door een boog $L(x, y)$, die $x$ en $y$ tot eindpunten heeft. Geldt $R(x, y)$ niet, dan worden $x$ en $y$ niet door een boog verbonden. De punten van $A$ noemen we de hoekpunten van de graph en de bogen $L(x, y)$ de kanten. De vereniging van alle kanten van een graph $G$ is een puntverzameling, die we als representatie van $G$ kunnen beschouwen. Daar we door-

[1]) Voordracht Vakantiecursus Mathematisch Centrum, 1963.

gaans niet onderscheiden tussen een graph en zijn representatie, zullen we de representatie van $G$ eveneens $G$ noemen. De graph $G$ is dus éénduidig bepaald door zijn hoekpunten en zijn kanten. Onder een deelgraph van $G$ zullen we verstaan een deelverzameling van de kantenverzameling van $G$.

Tot dusver hebben we de representatie van $G$ beschouwd als een puntverzameling. De vraag rijst of we deze puntverzameling mogen opvatten als deelverzameling van een $R^n$. We kunnen nu op een natuurlijke wijze in $G$ een metriek invoeren, waardoor $G$ een 1-dimensionale metrisch separabele ruimte wordt. Op grond van de inbeddingsstelling van Hurewicz kan $G$ dan altijd in de $R^3$ worden ingebed. Volgens deze stelling kan n.l. iedere metrisch separabele hoogstens $n$-dimensionale ruimte in $R^{2n+1}$ worden ingebed.

Om dit in te zien voeren we nog enige begrippen in. Laat gegeven zijn een rij hoekpunten $a_i$ $(i = 1 \ldots N)$ zodanig dat $a_i$ en $a_{i+1}$ $(i = 1 \ldots N-1)$ eindpunten van een kant zijn. De verzameling van kanten $[a_i, a_{i+1}]$ noemen we dan een kantentrek. $a_1$ en $a_N$ noemen we het begin- resp. het eindpunt van de kantentrek. Zijn begin- en eindpunt van een kantentrek hetzelfde hoekpunt, dan noemen we de kantentrek een cyclus. Zijn alle hoekpunten van een kantentrek twee aan twee verschillend, dan noemen we de kantentrek een weg.

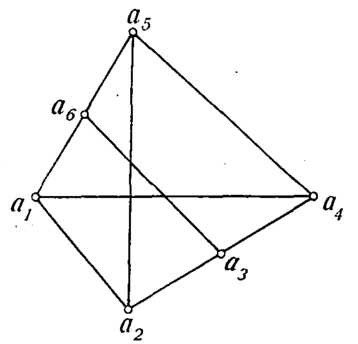
Men ziet gemakkelijk dat twee hoekpunten, die door een kantentrek kunnen worden verbonden, ook door een weg verbonden kunnen worden. We kunnen onze graph nu als volgt metriseren.

In iedere kant kunnen we een natuurlijke metriek kiezen, waardoor de kant de totale lengte 1 krijgt. Onder de lengte van een weg verstaan we dan het totale aantal kanten dat in de weg voorkomt. Zijn nu $a$ en $b$ twee verschillende hoekpunten van $G$, dan verstaan we onder de afstand $\rho(a, b)$ de lengte van de kortste weg, die $a$ en $b$ verbindt. Kunnen $a$ en $b$ niet door een weg verbonden worden, dan stellen we $\rho(a, b) = 1$. Is $p$ een punt van een kant $[x_1, x_2]$ en $q$ een punt van $[y_1, y_2]$ dan definiëren we $\rho(p, q) = \inf\, (\rho(p, x_i) + \rho(x_i, y_j) + (\rho(y_j, q))$ met $i, j = 1, 2$.

Tenslotte stellen we nog $\rho(x, x) = 0$ voor $x \in G$. Het is nu gemakkelijk te zien dat de aldus gedefinieerde functie $\rho(x, y)$ aan de metrische axioma's voldoet. We zien onmiddellijk dat $G$ ook separabel is. Immers we kunnen op iedere kant een aftelbare overal dichte deelverzameling kiezen. Daar $G$ slechts eindig veel kanten heeft, is de vereniging van deze aftelbare verzamelingen weer aftelbaar en overal dicht in $G$. $G$ is dus een metrisch separabele ruimte. Daar iedere kant een gesloten deelverzameling van $G$ is met dimensie 1, volgt uit de somstelling van de dimensietheorie, dat ook $\dim(G)$

$= 1$. Hieruit zien we dus, dat iedere eindige graph in $R^3$ ingebed kan worden. We merken nog op, dat dezelfde redenering ook nog voor aftelbaar oneindige graphen geldt.

Als we nu terugkeren tot het vraagstuk waar we vanuit gegaan zijn, dan kunnen we ons probleem nu ook als volgt stellen: is het mogelijk met behulp van twee verschillende kleuren, de hoekpunten van een graph zo te kleuren, dat iedere kant twee verschillend gekleurde uiteinden krijgt. Als voorbeeld bekijken we eens de graphen $K_1$ en $K_2$ uit figuur 1.




$K_1$

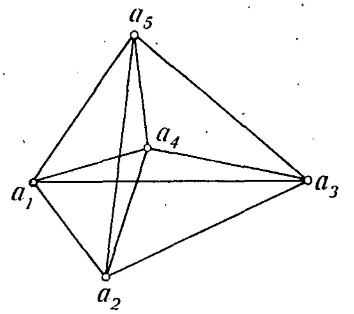



Fig. 1. $K_2$

We zien dat we in de graph $K_1$ ons doel kunnen bereiken, door bijv. de punten $a_1$, $a_3$ en $a_5$ blauw te kleuren en $a_2$, $a_4$ en $a_6$ rood. In de graph $K_2$ zal het ons echter niet lukken. Immers als $a_1$ bijv. blauw gemaakt wordt, dan moet $a_2$ rood worden, maar kunnen $a_3$, $a_4$ en $a_5$ noch blauw noch rood gemaakt worden.

Het is nu gemakkelijk in te zien, dat ons probleem dan en slechts dan een oplossing bezit als de bijbehorende graph de eigenschap heeft, dat iedere cyclus een even aantal kanten bezit.

Ons voorbeeld toont aan hoe de graphentheorie een makkelijk hulpmiddel kan zijn voor het oplossen van sommige kombinatorische problemen. Daar in de laatste decennia in verschillende wetenschappen dergelijke problemen naar voren zijn gekomen, is ook de belangstelling voor de graphentheorie snel toegenomen. We willen nog enkele belangrijke punten hiervan bespreken.

Laat de graph $G = [A, R]$ gegeven zijn, en kies een hoekpunt $a$ van $G$. Laat $A(a)$ de verzameling van alle hoekpunten $x$ van $G$ zijn, die voldoen aan de volgende voorwaarden: $x = a$ of $x$ kan door een weg met $a$ verbonden worden.

Dan geldt dat iedere kant ofwel beide eindpunten in $A(a)$ heeft, ofwel niets met $A(a)$ gemeen heeft. De deelgraph van $G$, die ge-

vormd wordt door alle kanten, die beide eindpunten in $A(a)$ hebben, noemen we de komponent van $a$. Men ziet gemakkelijk, dat $G$ op éénduidige wijze in komponenten gesplitst wordt. Heeft $G$ slechts 1 komponent, dan heet hij samenhangend. We zullen ons in het vervolg beperken tot samenhangende graphen.

Men kan nu in iedere kant van $G$ een richting vastleggen. In dat geval spreekt men wel van een gerichte graph. Een gerichte graph is nu een georiënteerd komplex in de zin van de homologietheorie. De homologiegroepen van $G$ vormen dus belangrijke topologische invarianten. Als $G$ samenhangend is, weten we uit de homologietheorie, dat de 0-de homologiegroep een oneindig cyclische groep is. De rang $p^0$ hiervan is dus 1. De eerste homologiegroep is te schrijven als directe som van een eindig aantal $p^1$ van oneindig cyclische groepen en eventueel een aantal eindige cyclische groepen. Deze laatste ontbreken hier echter. Immers als $z$ een 1-dimensionale cyclus en $m$ een heel getal is, zodanig dat $mz \sim 0$ is, dan volgt hieruit dat $mz = 0$ is, daar dim $G = 1$. Uit $mz = 0$ volgt echter $m = 0$ of $z = 0$.

Het getal $p^1$ geeft ons het maximale aantal lineair onafhankelijke cyclen, terwijl we weten dat een graph nooit torsie bezit. Het getal $p^1$ laat zich nu gemakkelijk berekenen als we het aantal hoekpunten en het aantal kanten van de graph kennen. We beschouwen daartoe eerst een samenhangende graph, die geen topologische cirkel bevat. Een dergelijke graph noemt men een boom. Als een boom $\alpha^0$ hoekpunten en $\alpha^1$ kanten heeft, dan is $\alpha^1 = \alpha^0 - 1$. Deze formule is juist als de boom slechts uit één kant bestaat. Als de formule juist is voor een boom $B$ en we voegen aan $B$ een kant $k$ toe, die met $B$ slechts één eindpunt gemeen heeft, dan geldt de formule ook voor de boom $B' = B \cup k$. Immers door toevoeging van $k$ neemt het aantal kanten en hoekpunten beide met 1 toe. Bovendien is $B'$ zeker weer een boom. Daar nu iedere boom verkregen kan worden door van één van zijn kanten uit te gaan en stap voor stap kanten toe te voegen, die met de reeds verkregen boom 1 eindpunt gemeen hebben, geldt de formule algemeen. Daar voor een boom $p^1 = 0$ is, geldt voor bomen de formule $p^1 = \alpha^1 - \alpha^0 + 1$. Deze formule geldt echter ook voor iedere eindige samenhangende graph. Zij n.l. $G$ een graph en $B^0$ een deelboom van $G$. Als iedere kant van $G$, die niet tot $B^0$ behoort, de beide eindpunten in $B^0$ heeft, dan heet $B^0$ maximaal. Is $B^0$ niet maximaal, dan kunnen we hem uitbreiden tot een boom $B_1$ die ontstaat door aan $B^0$ een kant toe te voegen, die met $B^0$ slechts 1 eindpunt gemeen heeft. Daar $G$ slechts eindig veel kanten heeft, moeten we op deze manier voortgaand, na eindig veel

stappen een maximale boom bereiken. Iedere boom van $G$ is dus altijd bevat in een maximale boom. Deze stelling geldt ook nog voor oneindige graphen. Bij het bewijs moet dan echter gebruik gemaakt worden van het lemma van Zorn.

Men ziet gemakkelijk dat een maximale boom $B$ in $G$, alle hoekpunten van $G$ moet bevatten. Immers zouden er hoekpunten in $G$ zijn, die niet in $B$ bevat zijn, dan zou er op grond van de samenhang van $G$ zeker een kant moeten zijn, die slechts 1 eindpunt met $B$ gemeen heeft. Dit is uitgesloten, omdat $B$ maximaal is.

Om nu onze formule te bewijzen, kiezen we een maximale boom $B$ in $G$. De kanten van $B$ zullen we aangeven met de letter $k$, en de niet tot $B$ behorende kanten met de letter $l$. Iedere kant $l$ heeft beide eindpunten in $B$ liggen. Daar $B$ een boom is kunnen de eindpunten van $l$ door één en slechts één weg $w$ in $B$ verbonden worden. Dan is echter $w \cup l$ een cyclus, die we als $z(l)$ aangeven. Daar iedere cyclus $z(l)$ slechts 1 kant $l$ bevat, zijn de cyclen $z(l)$ lineair onafhankelijk.

Bovendien vormen zij een basis voor de cyclen in $G$. Is n.l. $z$ een willekeurige cyclus in $G$, dan bevat $z$ zeker kanten $l$. Laat $l_1 \ldots l_N$ de in $z$ bevatte kanten $l$ zijn, en laat $l_i$ in $z$ voorkomen met de coëfficiënt $t_i$. Dan bevat de cyclus $z - \sum_{i=1}^{N} t_i z(l_i)$ geen kanten $l$. Derhalve is $z - \sum_{i=1}^{N} t_i z(l_i) = 0$ of $z = \sum_{i=1}^{N} t_i z(l_i)$. We kunnen hieruit de conclusie trekken dat er juist $p^1$ cyclen $z(l)$ zijn, en dus ook dat er $p^1$ kanten $l$ zijn. Daar $B$ een boom is, die alle hoekpunten van $G$ bevat, zijn er $\alpha^0 - 1$ kanten $k$. We hebben dus: $\alpha^1 = p^1 + \alpha^0 - 1$ of $p^1 = \alpha^1 - \alpha^0 + 1$. Bezit de graph $G$ juist $n$ verschillende komponenten, dan ziet men gemakkelijk, dat $p^1 = \alpha^1 - \alpha^0 + n$. Het getal $p^1$ noemt men ook wel de rang van de graph. Het blijkt, dat twee graphen, die eenzelfde aantal komponenten hebben en ook dezelfde rang, in alle homologie en homotopie eigenschappen overeenstemmen.

Een belangrijke reeks vragen hangt samen met de zogenaamde inbeddingsproblemen van graphen. We weten reeds, dat iedere graph in $R^3$ kan worden ingebed. Men kan zich afvragen, of dit misschien ook reeds in $R^2$ mogelijk is. Nu is gemakkelijk te zien, dat de graphen $K_1$ en $K_2$ uit fig. 1 geen van beide in het platte vlak kunnen worden ingebed. Kuratowski heeft bewezen dat een eindige graph $G$ dan en slechts dan in $R^2$ kan worden ingebed, als $G$ geen topologisch beeld van één der beide graphen $K_1$ en $K_2$ bevat. Deze stelling kan vrij eenvoudig bewezen worden door inductie naar

het aantal kanten van de graph. Het resultaat van Kuratowski kan ook uitgebreid worden tot aftelbaar oneindige graphen.

Evenzo kan men zich afvragen onder welke omstandigheden een graph bijv. in het projectieve vlak of in het ringoppervlak kan worden ingebed. Bekend is, dat de volledige 6-graph in het projectieve vlak en de volledige 7-graph in het ringoppervlak kan worden ingebed. Daarbij verstaan we onder de volledige $n$-graph, de graph met $n$ hoekpunten, waarbij ieder tweetal hoekpunten door een kant is verbonden. Een karakterisering van de in het projectieve vlak inbedbare graphen door middel van verboden figuren wordt minder geschikt door het grote aantal verboden figuren, dat optreedt. Het is bekend, dat iedere graph in een oriënteerbaar oppervlak van voldoend hoog geslacht kan worden ingebed. Onder de genus van een graph verstaan we nu het kleinste natuurlijke getal $g$, zodanig dat de graph in een oriënteerbaar oppervlak van geslacht $g$ kan worden ingebed. Er zijn echter nog geen methoden bekend om de genus van een graph te berekenen.

## BOEKBESPREKING

Dr. D. van Hiele-Geldof en G. Krooshof, Met medewerking van Dr. P. M. van Hiele en Dr. J. de Miranda *Wiskunde voor de M.M.S.* deel III, *f* 3.90, J. B. Wolters, Groningen 1962.

In de regel laten auteurs een nieuwe uitgave voorafgaan door een voorwoord; bij dit boek heb ik dat voorwoord in geen der drie delen kunnen vinden. Nu kan een voorwoord nog wel eens worden gemist, in het onderhavige geval had ik echter graag willen vernemen wat de bedoeling is van het boek en in het bijzonder, wat of de schrijvers zich als zin van het wiskundeonderwijs op de M.M.S. voorstellen. Dat zij die anders zien als bij het overige V.H.M.O. blijkt uit het boekje wel; die zin wordt zeker als positief ervaren. Dat de betekenis van het wiskundeonderwijs op dit schooltype mij na kennisname van dit boek veel duidelijker is geworden, kan ik niet zeggen. Ergens meen ik immers iets te herkennen van het standpunt: ,,We zitten er nu eenmaal mee; laat ons daarom proberen er wat van te maken".

Het is dan ook een origineel geschrift geworden en in het bijzonder is de volgorde lichtelijk onthutsend; dat de algebra en de meetkunde in volgorde zijn gemengd, is aanvaardbaar; hier en daar is de overgang zeer verdienstelijk tot stand gebracht. Zo komt de wenselijkheid de wortelvormen in te voeren en te behandelen zeer soepel uit ,,Pythagoras" te voorschijn. Dat de meisjes $\sqrt{881,2}$ in twee decimalen leren uitrekenen, gaat mij te ver. Er volgen oneigenlijke machten (geen logaritmen), manipulaties met het getal 0; de begrippen stelling en definitie; dan duiken wat verlaat de evenwijdige lijnen op met de mooie term zaaghoeken. Halverwege ontdekken we nog dat de som van de hoeken van een driehoek 180° is en dat een gelijkbenige driehoek gelijke basishoeken heeft. Dan het begrip symmetrie en nog wat over cirkels en koordenvierhoeken; ook omtrek en oppervlak van een cirkel komen aan de orde. We switchen naar de algebra en leren kwadratische functies kennen

(compleet met top van de parabool) en gaan tenslotte vierkantsvergelijkingen oplossen (compleet met discriminant). Dit is alles met gepaste toepassing van grafische voorstellingen.

De volgorde is dus nogal inconventioneel. Het zal duidelijk zijn, dat ik vraagtekens zet bij de stof. T.a.v. het boekje zelf heb ik neiging die weg te laten. Ik geloof zelfs, dat de meisjes dit een prettig boek zullen vinden, het is helder geschreven en goed verzorgd; met figuren is men niet karig en het kunstzinnige element is terecht niet verwaarloosd. De theorie is zeker verteerbaar; de gelegenheid tot zelfwerkzaamheid lijkt mij groot, mede omdat de vraagstukken een duidelijke functie hebben; zij behoren tot de theorie, de leerlingen worden gedwongen zelf die theorie ermee op te bouwen. Het geheel is voor de meisjes animerend en vermoedelijk zelfs stimulerend.

Resumerend dus: Wanneer men de stelling accepteert, dat deze leerlingen kennis moeten dragen van de wiskunde — een stelling waarvan ik de juistheid noch zonder bewijs aanvaard noch zonder bewijs verwerp — dan kan men zich veilig tot dit boek wenden. En wanneer men deze stelling niet accepteert en min of meer noodgedwongen de brede ontwikkeling, die de M.M.S. zonder twijfel geeft, moet uitbreiden met de kunde de top van een parabool te bepalen en met andere foefjes, dan nog kan men zich verlustigen aan de frisheid van het boek. De docent en de leerlingen vinden in dit boek een compromis tussen drie dingen: wat moet, wat kan en wat wordt als prettig ervaren.

Het zal zijn weg wel vinden. Als ik de auteurs gelukwens, kunnen zij de gedachte aan een beleefdheidsfrase uitbannen.

Groenman.

F. Groen en Drs. A. Pels. *Algebra voor Gymnasium Va en VIa* volgens programma 1958. W. J. Thieme & Cie, Zutphen 1961; 99 blz., ing. *f* 3,50, geb. *f* 4,25.

Sinds het nieuwe wiskundeprogramma van kracht is, bestaat er behoefte aan een algebraboek, waarin de onderwerpen worden behandeld die voor de klassen V*a* en VI*a* van het Gymnasium kunnen worden gekozen. In deze behoefte voorziet het bovenvermelde boek.

Het is jammer, dat deze onderwerpen zelf echter nog al op ouderwetse wijze worden behandeld.

Bij de vierkantsvergelijkingen mis ik de methode van het kwadraatafsplitsen. Bij de kwadratische functie worden formules afgeleid voor het berekenen van maximum of minimum. Het lijkt mij overbodig deze te laten leren, temeer daar enige paragrafen eerder een goede methode is behandeld. Bij het hoofdstuk logaritmen behoort een inleiding, waarin de oneigenlijke machten worden behandeld. In § 59 en § 60 wordt het akelige trucje geleerd om de wijzer van een logaritme te bepalen. Het is beter op de orde van grootte van een getal te letten, zoals de schrijvers in het begin van § 59 ook doen.

De invoering van het begrip rationaal getal in § 65 is verwarrend. Het is ook verwarrend om commutatief omkeerbaar te noemen. In § 68 is het verschil tussen het complexe vlak en de grafiek van een functie niet duidelijk. Het invoeren van een $S$ bij rijen lijkt mij overbodig. Het zou veel beter zijn, als we tot de afspraak konden komen om een rij te beginnen met de nulde term, zodat bijvoorbeeld van een rekenkundige rij $t_n = a + nv$ waarbij $a = t_0$.

Daarentegen geschiedt de invoering van het differentiequotiënt enz. zeer duidelijk, terwijl aan het eind van het boek een iets nauwkeuriger behandeling volgt. In § 103

wordt een zeer juiste en duidelijke methode behandeld voor het bepalen van de uiterste waarden van een functie aan de hand van het tekenverloop van de eerste afgeleide. Maar waarom moet nu in § 104 direct dit hele idee verlaten worden en een andere ongelukkige methode gekozen worden voor hetzelfde doel?

In het algemeen is de behandeling van de theorie te veel gericht op het leren van regeltjes en formules. Het vraagstukkenmateriaal lijkt mij wel uitermate geschikt voor de $a$-leerlingen, zodat het boek toch zeker goed te gebruiken is.

A. N. Habermann.

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof, *Werkboek der Algebra I*, zesde druk, 196 blz., *f* 5,25. J. Muusses N.V. Purmerend. 1961.

Het boek bestaat uit vier gedeelten: 1. De systematische cursus, blz. 1-102; 2. Herhaling en uitbreiding, blz. 103-174; 3. De regels van de algebra, blz. 175-182; 4. Vragen over de regels van de algebra 183-187.

Het doorlezen van een boek van Van Hiele is altijd een prettige en verfrissende bezigheid. Ook deze volledig omgewerkte uitgave van het werkboek der Algebra I is rijk aan originele ideeën. Het begint al op de eerste bladzijde, waar de rij der kwadraten aan de orde wordt gesteld, gedemonstreerd door driehoeken en vierkanten. Drie bladzijden verder komt dan de eerste grafiek. De grafieken spelen hier reeds in de eerste klas een grote rol. Met belangstelling heb ik gekeken naar de motivering van het gebruik van letters in de algebra. Op blz. 15 bij de behandeling van de machten leest men: „Om duidelijk te laten uitkomen, dat het grondtal er niet toe doet, schrijven we voor dat grondtal de letter $a$." Het invoeren van het letterrekenen geschiedt hier dus zonder veel drukte en dat is, alle discussies ten spijt, waarschijnlijk ook wel het beste. In elk geval kan de $a$ in $a^5$ geen appel voorstellen, zodat het getalkarakter beter uitkomt dan bijvoorbeeld in $3a + 4a = 7a$.

Vooral merkwaardig zijn hoofdstuk XIIa: Evenredigheden, waar met een evenredigheidsmatrix wordt gewerkt, en hoofdstuk XIIb: Inleiding tot de goniometrie. Hieruit blijkt wel, dat het werk in ieder opzicht verschilt van een traditioneel leerboek der algebra. Ieder die zich voor de vernieuwing van het algebraonderwijs interesseert doet goed zich op het hier gebodene te bezinnen. Kortom: een bewonderenswaardig boek, dat hoge eisen stelt aan de gebruiker. Leerlingen die het boek met begrip hebben doorgewerkt zijn een enorm stuk verder gekomen in hun wiskundige ontwikkeling. Het zou echter interessant zijn te weten welk percentage van de middelbare schoolbevolking het inderdaad in de eerste klas zo ver kan brengen.

R. Troelstra.

G. R. Veldkamp en Dr. Fred. Schuh, *Lineaire Algebra en Analytische Meetkunde*. Eerste deel: Meetkunde behandeld met Lineaire Algebra. Met 328 vraagstukken. W. J. Thieme & Cie. Zutphen 1961. 332 blz.; geb. *f* 25,—.

De Nederlandse wiskundeliteratuur is verrijkt met een belangrijk leerboek over de lineaire algebra en de analytische meetkunde. Na het inleidende hoofdstuk I wordt in hoofdstuk II het begrip affiene ruimte ingevoerd, uitgaande van een aantal axioma's. In de volgende hoofdstukken vindt men uiteenzettingen over lineaire afhankelijkheid, matrices, lineaire transformaties, gekoppelde vectorruimten, lineaire vergelijkingen en determinanten. Daarna volgen toepassingen op affiene meetkunde, waarna de definitie van euclidische vectorruimte wordt gegeven en

het begrip loodrecht aan de orde komt. Een hoofdstuk over bilineaire en kwadratische functies met de hoofdassentransformatie en een hoofdstuk over splitsing in invariante deelruimten besluiten het boek.

Nu de belangstelling voor lineaire algebra steeds toeneemt, kan men het verschijnen van een dergelijk gedegen werk als hier wordt aangekondigd als een belangrijke gebeurtenis beschouwen. Het boek is zeer duidelijk geschreven en de naam van de schrijvers staat er wel borg voor, dat het ook wetenschappelijk verantwoord zal zijn. Men stelle zich echter niet voor, dat men, in een gemakkelijke stoel gezeten, dit werk eventjes doorleest. Het vereist een nauwgezette studie en een grote dosis volharding. De talrijke vraagstukken bieden gelegenheid zich goed in de stof in te werken. Het werk is een eerste deel. Met belangstelling zien we uit naar wat deel twee zal bevatten.

R Troelstra.

Lloyd L. Lowenstein, *Beginning Algebra for College Students*, third Edition, John Wiley and Sons, Inc. New-York—London 1962, 265 blz, 38.—.

In dit, vergeleken bij onze schoolboeken, bijna luxueus uitgegeven boek wordt de algebra tot en met de vierkantsvergelijkingen behandeld, inclusief de complexe getallen, die jammer genoeg van ons schoolprogramma zijn afgevoerd. Aansluitend vindt men de grafieken van lineaire en kwadratische functies.

Hiermee zou recensent kunnen volstaan, ware het niet dat de schrijver wegen bewandelt, die ook in ons aanvangsonderwijs van de algebra worden nagestreefd. Schrijver begint n.l. al onmiddellijk met het begrip verzameling.

Zo wordt eerst alléén gewerkt met de verzameling van de natuurlijke getallen, worden met veel nadruk de commutatieve en associatieve wetten van de optelling en vermenigvuldiging besproken, waarna de distributieve wet voor de opeenvolging van vermenigvuldiging en optelling besproken wordt. Daarna volgt de inverse bewerking aftrekken en alras blijkt, dat de gegeven verzameling uitgebreid dient te worden met nieuwe getallen. De oorspronkelijke verzameling is dan een deelverzameling van die van de gehele getallen. De deling veroorzaakt dan een hernieuwde uitbreiding enz. Tegelijk wordt een moderne notatie ingevoerd, zodat de opgaven de vorm kunnen krijgen: $\{x/x$ is een geheel getal en $-3 < x < -1\}$

Het begrip functie wordt ingevoerd als een verzameling van geordende paren, een eenduidige afbeelding van de elementen van de ene verzameling op die van een andere (of dezelfde). Vergelijkingen worden slechts na ontbinding in factoren opgelost (dus *niet* toegestaan is: $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$). Voor wie de modernisering ter harte gaat een aanbevelenswaardig boek.

Burgers.

W. T. Fishback, *Projective and Euclidean Geometry*, John Wiley and Sons, Inc., New-York—London 1962, 240 blz., 57,—.

In de eerste hoofdstukken geeft de schrijver een kritische bespreking van de Euclidische meetkunde, wijst hij op de leemten die bij de Griekse wijze van behandelen optreden. (Euclid reexamined); hij kiest dan het axiomastelsel van Hilbert om er een moderne behandeling mee te vergelijken. Aangezien het volledigheidsaxioma het systeem sluitend maakt, wordt nagegaan wat de gevolgen zijn van het aannemen van oneindig verre punten (ideal points), elementen die in het geschetste Hilbertsysteem zonder meer niet passen en voeren tot de projectieve meetkunde.

Daartoe wordt het systeem Hilbert aangepast aan de nieuwe situatie, enkele axioma's komen te vervallen, andere komen ervoor in de plaats. Het dualiteitsprincipe krijgt een centrale plaats.

Daarna volgt een synthetische behandeling van de projectieve meetkunde (harmonische viertallen en vierstralen, theorema van Desargues). Dit hoofdstuk wordt afgesloten met de stelling van Pappus.

Na invoering van homogene coördinaten kan overgegaan worden tot een analytische behandeling. Hoofdstuk 7 behandelt in het kort de benodigde stellingen over vectoren en van de matrixalgebra, waarna de behandeling van de kegelsneden volgt. Tenslotte volgt nog een axiomatische behandeling van de projectieve meetkunde, geheel los van de Euclidische meetkunde.

Voor studenten in de wiskunde en voor hen die belangstelling hebben voor dit grondslagenonderzoek, zeker dus leraren aan onze scholen, een aanwinst.

Burgers.

## WIMECOS

WIJZIGING SECRETARIAAT. Het secretariaat berust sedert de algemene vergadering van 27 dec. j.l. bij de heer drs. A. J. Th. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.

EINDEXAMENREGELING

Door het bestuur van Wimecos is de volgende brief verzonden:

Zeist, 24 december 1963

Aan Zijne Excellentie de Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen te 's-Gravenhage.

Excellentie,

het bestuur van de Vereniging van Leraren in de Wiskunde en de Kosmografie (Wimecos) zou gaarne het volgende onder Uw aandacht brengen:

bij de huidige eindexamenregeling voor gymnasium-B en hogere burgerschool-B wordt de wiskunde in drie onderdelen gesplitst:
wiskunde I: algebra en differentiaalrekening;
wiskunde II: goniometrie en analytische meetkunde;
wiskunde III: stereometrie.

Het komt het bestuur van Wimecos voor, dat bij deze indeling aan het onderdeel „stereometrie" een te grote invloed op de uitslag van het examen wordt toegekend. In dit vak komt het n.l. minder op wiskundig dan op ruimtelijk inzicht aan. Bovendien werd het vroeger op de H.B.S.-B gecombineerd met beschrijvende meetkunde, waarbij de leerling een zekere „technische" vaardigheid moest bezitten, die ook door minder wiskundig begaafden „geleerd" kon worden.

Ons bestuur zou daarom aan een andere indeling de voorkeur geven:
wiskunde I: algebra en differentiaalrekening;
wiskunde II: goniometrie en stereometrie;
wiskunde III: analytische meetkunde.

Het meent dat hierdoor een meer evenwichtige indeling verkregen zou worden.

Afschriften van deze brief zijn verzonden aan de heren dr. L. M. van Dis, voorzitter van het college van inspecteurs V.H.M.O. en aan de heren inspecteurs dr. H. A. Gribnau, dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof.

Met de meeste hoogachting,
namens het bestuur van Wimecos de secretaris,

w.g. J. F. Huffernan

## MATHEMATISCH CENTRUM

Bij voldoende belangstelling zal door het Mathematisch Centrum onder auspiciën van het Genootschap Johann Bernoulli in Groningen een oriënterende cursus mathematische statistiek worden gegeven. De voordrachten zullen in principe op woensdagavond om de veertien dagen worden gehouden, te beginnen op woensdagavond 5 februari 1964.

Voor het volgen van de cursus is enige kennis van de differentiaal- en integraalrekening een vereiste. De kosten van deelneming bedragen ƒ 50,—, waarin een bedrag van ƒ 10,— voor de aanschaf van de bij de cursus behorende syllabus is begrepen. Voor leraren, leden van de universitaire wetenschappelijke staf en studenten geldt een vrijstelling van cursusgeld en zijn slechts de kosten van de syllabus ad ƒ 10,— verschuldigd. Tevens kan volledige of gedeeltelijke vrijstelling van de betaling van cursusgeld en kosten van de syllabus worden verleend, indien een daartoe strekkend, met redenen omkleed, verzoek wordt ingediend.

Verzoeken om nadere inlichtingen en opgaven als deelnemer aan de cursus kunnen worden gericht tot de Administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O. Deelnemers ontvangen nader bericht over tijd en plaats van de eerste bijeenkomst.

## RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossing (liefst persklaar) en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin.

103. Gegeven is, dat 4.9.11 = 2.1.11. Hierbij zijn 4.9.11 en 2.1.11 getallen, die geschreven zijn in verschillende talstelsels en die bestaan uit resp. de „cijfers" 4, 9, 11 en 2, 1, 11. Het grondgetal van minstens een van de beide talstelsels is priem. Aan welk (tientallig geschreven) getal zijn deze beide getallen gelijk?

104. In een zak bevindt zich 1 knikker, die wit of zwart is. Bij deze knikker wordt een witte knikker gevoegd. Daarna wordt uit de zak 1 knikker getrokken, die wit blijkt te zijn. Hoe groot is de kans, dat de resterende knikker ook wit is?

In verband met het feit, dat er enige plaatsruimte over is, geven we ditmaal van dit probleem hieronder direct de oplossing. Maar probeert u het zelf toch liever eerst even.

### OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

101.

| | WD | Ch | It | Zw |
|---|---|---|---|---|
| West-Duitsland | × | 2—0 | 0—0 | 2—1 |
| Chili | 0—2 | × | 2—0 | 3—1 |
| Italië | 0—0 | 0—2 | × | 3—0 |
| Zwitserland | 1—2 | 1—3 | 0—3 | × |

| | Br | Ts | Me | Sp |
|---|---|---|---|---|
| Brazilië | × | 0—0 | 2—0 | 2—1 |
| Tsjechoslowakije | 0—0 | × | 1—3 | 1—0 |
| Mexico | 0—2 | 3—1 | × | 0—1 |
| Spanje | 1—2 | 0—1 | 1—0 | × |

102. Als we het geval, dat geen enkel gewicht op de schaal gelegd wordt, meerekenen, dan zijn er $2^n$ verschillende wegingen mogelijk (het 1-ste gewicht kan al of niet op de schaal geplaatst worden, het 2-de gewicht al of niet, enz.). Elk gewicht zal hierbij even vaak wel als niet op de schaal gelegd worden. Elk gewicht wordt dus $2^{n-1}$ keer op de schaal gelegd. Het gevraagde totale gewicht is dus

$$2^{n-1}(1 + 2 + \ldots n) = 2^{n-2}\, n(n + 1)$$

104. Als de eerste knikker zwart was, is de resterende knikker ook zwart; is de eerste knikker wit, dan is de resterende knikker wit. De kans, dat de eerste knikker wit is, is $\frac{1}{2}$. De kans, dat de resterende knikker wit is, is dus ook $\frac{1}{2}$.